UN NŒUD BORROMÉEN NE PEUT AVOIR PLUS DE DEUX CERCLES GÉOMÉTRIQUES

N. MAJSTER ET A. ANTÓN

Il est difficile de traiter un objet sans comprendre où situer son ou ses impossibles.

Il existe très peu de littérature mathématique sur les nœuds borroméens, et ce alors que la littérature sur la théorie des nœuds prolifère depuis les années 1990. Le nœud borroméen est constitué par un entrelacs de trois anneaux dans l'espace $\mathbf{R}^3$ qui ne peuvent être détachés les uns des autres même en les déformant, mais tel que la suppression de n'importe quel anneau libère les deux anneaux restants ; ils sont donc tous *disjoints*. Rappelons qu'un anneau est juste une image *homéomorphe* d'un cercle géométrique, c'est-à-dire, un cercle déformé à volonté mais jamais déchiré. Mais bien que depuis des siècles on dessine le nœud borroméen à plat avec des cercles purement géométriques, comme dans la figure 1 représentant la Trinité chrétienne, le nœud borroméen peut-il être réalisé dans l'espace $\mathbf{R}^3$ par trois cercles géométriques ?

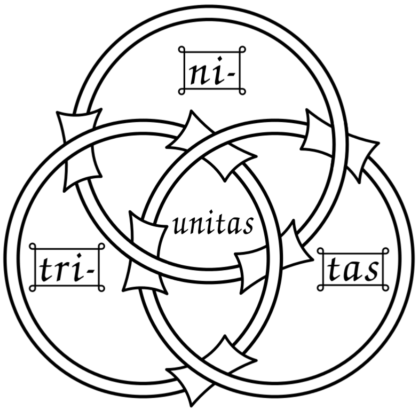

FIGURE 1

Deux mathématiciens suédois, LINDSTRÖM et ZETTERSTRÖM [1] ont écrit un article [2] qui mérite notre intérêt et dans lequel ils démontrent précisément qu'un nœud borroméen constitué que de cercles géométriques est impossible dans l'espace.

L'article concerné a la particularité d'être très court (deux pages à peine), et procède par un raisonnement par l'absurde. Il donne plutôt l'impression de se situer sur le versant des « mathématiques amusantes ».

Supposons donc que trois cercles géométriques C_1, C_2 et C_3 dans l'espace soient noués de manière borroméenne comme dans la figure 2. Tout d'abord, rappelons qu'aucun d'eux ne touche les deux autres. Il en découle que C_2 et C_3 doivent se trouver dans des plans différents, d'après

1. B. LINDSTRÖM et H.-O. ZETTERSTRÖM. « Borromean circles are impossible ». Dans : *American Mathematical Monthly* 98.4 (avr. 1991), p. 340-341.

2. Consultable sur http://jstor.org sous le nom des auteurs. Nous leur empruntons les deux figures de l'article qui suit.

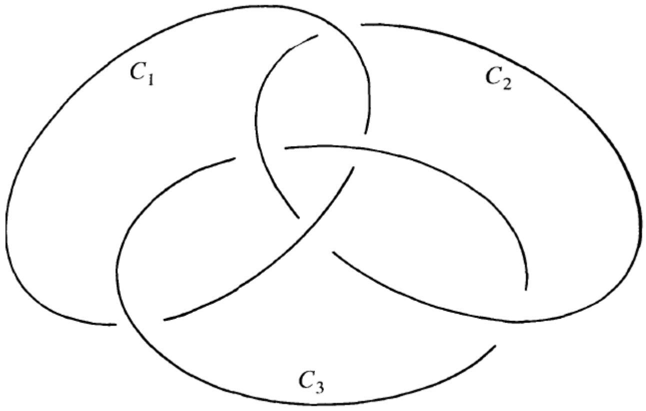

FIGURE 2

le diagramme, et on peut donc, à l'aide de mouvements purement euclidiens, rapporter C_2 jusqu'à ce qu'il touche C_1 dans deux points, et ceci sans que C_2 ne rencontre jamais C_3. L'argumentation des auteurs s'articule en deux parties contenant chacune une preuve selon que C_1 et C_2 soient coplanaires ou pas.

Si C_2 est dans le plan $\mathcal{P}$ de C_1, puisque C_2 et C_3 sont disjoints le plan de C_3 doit alors couper obliquement $\mathcal{P}$ avec un angle supérieur à zéro, et C_3 doit le rencontrer en deux points exactement, car d'après le diagramme (voir la deuxième figure), une partie de C_3 se trouverait en dessous de $\mathcal{P}$, et l'autre par dessus. Mais toujours d'après la mise à plat, le cercle C_3 passerait sur C_1, puis sous C_2, puis sur C_1, puis sous C_2 avant de revenir sur C_1, intersectant ainsi quatre fois le plan $\mathcal{P}$; comme un cercle ne peut rencontrer un plan plus de deux fois sans y appartenir entièrement, ceci implique que C_3 est contenu dans $\mathcal{P}$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ce cas est donc impossible ; notons au passage qu'une configuration plate où les trois cercles s'intersectent les uns avec les autres (comme dans un dessous de table), ne peut constituer, par définition, un nœud borroméen en soi car les trois cercles ne sont pas disjoints.

Prenons à présent le second cas, où C_1 et C_2 ne sont pas coplanaires. Chacun des cercles se trouve dans un plan différent, les deux se coupant en ligne droite, comme dans une porte à deux battants avec un angle variable, peut importe lequel, dès lors qu'il est inférieur à 180° (sans quoi on revient au cas précédent).

L'article démontre en ce cas qu'une figure géométrique peut être construite en prenant le segment (P et Q) formé par les deux points qui se touchent en C_1 et C_2, et R le milieu de ce segment. Les normales des deux cercles (points S_1 et S_2 dans l'article) ne sont plus parallèles et se rencontrent au point T (voir la figure ci-dessous) qui sera à la même distance de tout point dans C_1 ou C_2. Ce point formera avec R le rayon d'une sphère auquel C_1 et C_2 appartiennent. Si deux cercles se coupent sans appartenir au même plan ils appartiennent à la même sphère.

Si on suit, comme on l'a fait précédemment, le diagramme du nœud mise à plat, C_3 devrait couper la sphère ainsi définie quatre fois. Un cercle ne peut couper une sphère qu'une ou deux fois. Au-delà de deux fois, il appartient à la sphère et dans ce cas les trois anneaux ne sont plus disjoints.

Remarquons aussi que si l'angle formé par le plan défini par C_1 et C_2 variait, alors le rayon de C_3 serait modifié, ce qui est également impossible.

La conclusion est que des trois anneaux, deux au plus peuvent être des cercles géométriques.

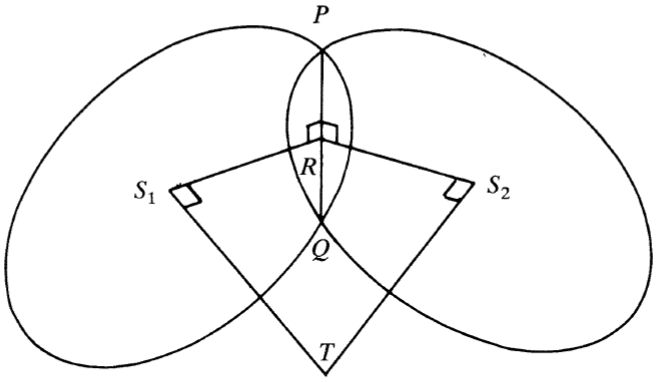

FIGURE 3

Dans un prochain article, à partir de la contribution d'un autre mathématicien, nous verrons comment on démontre que le nœud borroméen est indissoluble.