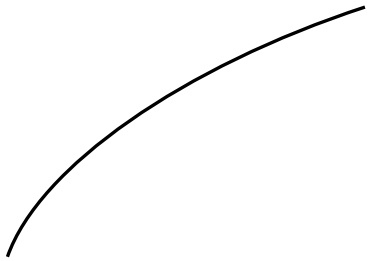
Écritures du nœud

Henri Cesbron Lavau

Que ça ne décolle pas de l'écriture, comment le montrer ? sinon par l'écriture. La question devient alors : comment montrer par l'écriture que ça ne décolle pas de l'écriture ? Dire que c'est impossible serait déjà y contredire. Ce travail, donc, pour s'y employer, quel meilleur choix que de s'y coller, c'est-à-dire d'écrire.

Écrire le nœud, tel est notre propos.

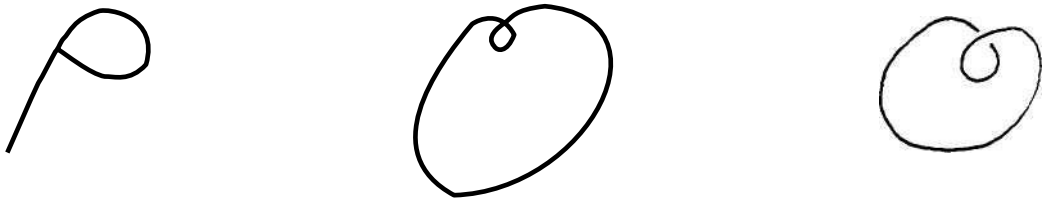
Au départ, le trait.



Ce trait existe-t-il ? A l'observer au plus près, dans sa physique même, on ne trouverait qu'une surface, ou un volume de particules déposées sur la feuille. Le trait n'a pas de réalité. Son existence, il ne la tient que de l'écriture.

Je suppose donc qu'il y a quelqu'un pour qui ce trait existe - supposition fondée sur le dire de cet autre - à partir de quoi, le travail devient possible.

Ce trait, nous le prolongeons jusqu'à ce qu'il revienne en un de ses points.



Les points sont repérés dans l'espace (à 3 dimensions). Et la règle d'écriture consiste en ce que le trait ne se traverse pas lui-même : c'est ce qui se figure d'un dessus-dessous ou du dire que le noeud est une consistance.

Est-ce qu'on tient là quelque chose du noeud ?

A-t-on écrit des nœuds ?

Tant que deux dessins diffèrent par leur dimension, ça ne fait pas encore écriture. Il faut pour cela que l'on ait repéré des constantes qui nous font reconnaître des structures.

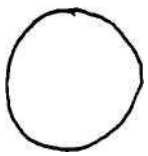
C'est le lot commun de l'écriture :

Cette image, simplifiée et rapide, attrape quand même quelque chose de ce pourquoi la topologie est si adaptée au travail d'écriture, à ne tenir compte que de la disposition respective, et non des distances.

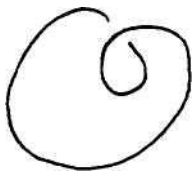
Tenir compte des dispositions respectives se traduit en théorie des nœuds à repérer des invariants, des valeurs qui resteront les mêmes quelle que soit l'habileté de celui qui dessine le nœud.

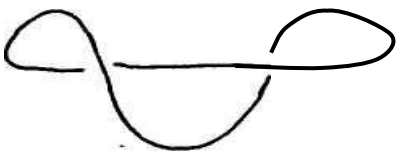
Un invariant est par exemple, *le nombre minimum de croisements du nœud* repéra ce nombre est O, ou 3 ou plus.

Zéro croisement, c'est la simple boucle, encore appelée nœud trivial.



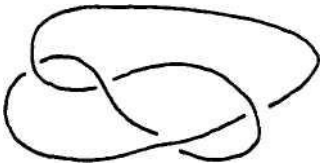
Il n'y a pas de nœuds dont le nombre *minimum* de croisements soit 1 ou 2 : on peut toujours les ramener au nœud trivial. (Il suffit de tirer).



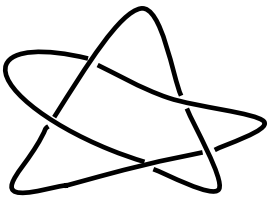


3 croisements, c'est le nœud de trèfle,

4 croisements, le nœud en huit,



Au-delà, le nombre de croisements n'est plus caractéristique du nœud :



Ces deux nœuds diffèrent - on ne peut amener l'un sur le tracé de l'autre - et pourtant le nombre minimal de recoupement dans la mise à plat est de 5, pour l'un comme pour l'autre.

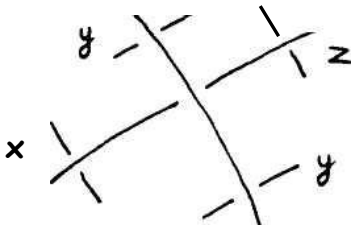
Il faut donc faire appel à d'autres invariants pour différencier les nœuds entre eux d'une manière formelle.

Ainsi, le groupe fondamental est l'un des invariants qui contribue à l'établissement d'une classification des nœuds.

Nous en aborderons l'écriture grâce à une représentation du nœud dans la mise à plat, due à Wirtinger.

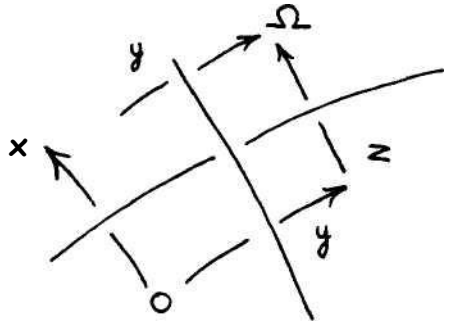
Comment écrire un dessus dessous :

1er temps : On trace, sous chaque demi-segment situé de part et d'autre de l'intersection un petit trait. Ce qui donne 4 petits traits.



2ème temps : On note par une petite lettre chacun des 4 traits. Si l'on prend un de ces traits entre le pouce et l'index, on peut le faire coulisser sous le brin du nœud. Mais, le trait X est alors arrêté par le brin dessus. De même Z. En revanche Y n'est pas arrêté, puisqu'il peut passer entre le brin dessus et le brin dessous.

3ème temps : On oriente chacun des traits



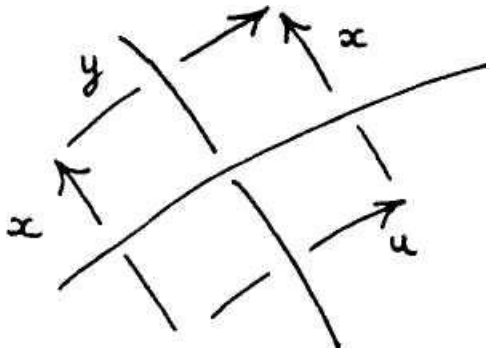
Il n'apparaît que pour aller de O à Ω, on peut emprunter le parcourt X, suivi de Y : XY ou Y suivi de Z, YZ.

XY est un parcourt qui passe sous les deux brins du nœud, tout comme YZ.

On peut donc, par déformation continue amener le parcourt XY à coïncider avec le parcourt YZ.

Ce qui se note XY = YZ

Si l'intersection avait été autre, brin dessus et brin dessous s'interchangeait, on aurait le schéma :

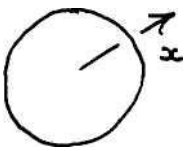


Ce qui aurait donné
XY = UX

Au niveau d'un nœud complet, cette écriture rend bien compte de la position respective des dessus dessous.

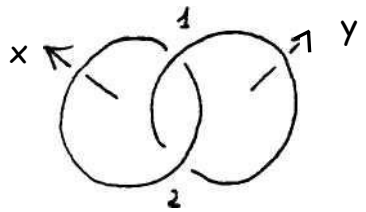
On peut alors traduire une structure de disposition des brins dans la mise à plat d'un nœud par une écriture algébrique.

Ainsi . le nœud trivial donne :



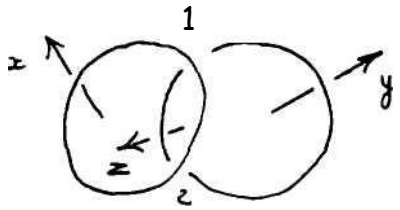
{X /}

. la chaine simple donne :



en 1 : XY = YX
en 2 : XY = YX
soit $\{X,Y / XY = YX\}$

. et 2 boucles posées l'une sur l'autre :



en 1 : ZX = XY
en 2 : ZX = XY
soit $\{X,Y,Z / ZX = XY\}$

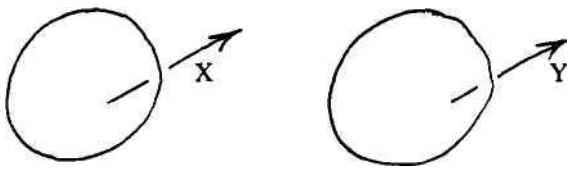
Mais Z peut s'exprimer en fonction de X et de Y, Z = XY X^{-1} (il suffit de multiplier à droite par X^{-1}. X^{-1} est le parcours inverse de X

↗ X ↙ X^{-1}, et faire un aller-retour XX^{-1} est topologiquement équivalent à rester sur place - en effet, il n'y a pas de distance métrique ; tout est élastique. Seuls sont significatifs les obstacles).

Z étant calculable à partir de X et de Y, on peut s'en tenir à la représentation simplifiée des 2 boucles posées l'une sur l'autre :

$\{X, Y, \cancel{Z} / \cancel{Z = XY X^{-1}}\}$
soit $\{X, Y, /\}$

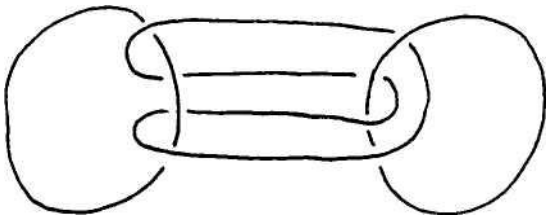
Cette écriture n'est autre que celle de 2 boucles indépendantes



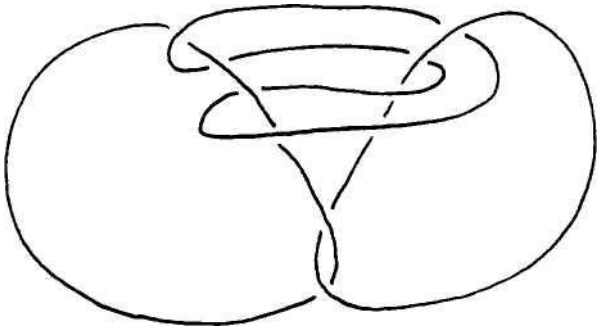
On a donc, par élimination, établi algébriquement que 2 boucles posées l'une sur l'autre ne sont pas liées ensemble.

Cette écriture permet de prouver l'effet de transformations qui sont moins triviales.

Par exemple, la chaine borroméenne



libère la boucle centrale si l'on fait passer après chirurgie, la boucle de droite dans la boucle de gauche :



Faites le avec des ficelles. Vous pourrez le constater. Cela peut aussi s'établir algébriquement à l'aide de l'écriture introduite ci-dessus. (Il est préférable, pour ne pas trop charger les équations, de partir de la représentation minimale habituelle du nœud borroméen)...

Du point de vue de l'analyse, est-on fondé à noter R et I les ronds extrêmes et S le rond central ? Et d'avancer ceci : quand réel et imaginaire se prennent à se tenir l'un l'autre, choit le symbolique, dans ce que l'on appelle l'a-liénation.

Suit une remarque de Charles MELMAN sur le procès de l'algèbre et que je résume ainsi : une écriture qui se déploierait selon une automatique. Que ça marche tout seul ne fait pas l'affaire du sujet : le symbolique ne se soutient pas non plus que de lui-même.